Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 14 luglio 2023

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - |x+1|}$$

determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), eventuali punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di concavità e convessità. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione può essere definita per casi a seconda del segno di $(x+1)$; abbiamo infatti:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - x - 1} & \text{se } x \geq -1 \\ \sqrt{2x^2 + x + 1} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Data la presenza della radice quadrata dobbiamo imporre che il suo argomento sia maggiore o uguale a zero, ovvero

$$2x^2 - x - 1 \geq 0 \text{ se } x \geq -1$$

$$2x^2 + x + 1 \geq 0 \text{ se } x < -1.$$

La prima disequazione è verificata per $x \leq -\frac{1}{2}$ o per $x \geq 1$, mentre la seconda è sempre vera. Intersecando i risultati con i due casi $x \geq -1$ e $x < -1$, otteniamo l'insieme di definizione D di f, $D = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cap [1, +\infty)$. La funzione è continua nel suo dominio perchè somma e composizione di funzioni continue ove definite. Ne deduciamo anche che la funzione è sempre positiva o nulla, quindi inferiormente limitata, e si annulla nei punti $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 1$, che sono quindi punti di minimo assoluto e $\inf f = \min f = 0$. Non possono inoltre esistere asintoti verticali. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{2 - \frac{(x+1)}{x^2}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 + x + 1} = \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{2 + \frac{(x+1)}{x^2}} = +\infty.$$

Ne segue che la funzione non è superiormente limitata, $\sup f = +\infty$ e non esistono asintoti orizzontali. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x - 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{2 - \frac{(x+1)}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{2 - \frac{(x+1)}{x^2}} = \sqrt{2},$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{2 + \frac{(x+1)}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{2 + \frac{(x+1)}{x^2}} = -\sqrt{2}.$$

Calcoliamo alllora, usando lo sviluppo di Taylor di $(1+t)^{1/2}$ per $t \to 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - x - 1} - \sqrt{2}x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{2}x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2}} - 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{2}x \left(1 - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

e analogamente

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Concludiamo l'esistenza dell'asintoto obliquo di equazione $y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}$ per $x \to +\infty$ e dell'asintoto obliquo di equazione $y == -\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}$ per $x \to -\infty$. Per studiare eventuali punti di massimo o minimo locale, calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2x^2-x-1}}(4x-1) & \text{se } x \geq -1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2x^2+x+1}}(4x+1) & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

che è definita su tutto il dominio tranne nei punti $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 1$. Studiandone il segno, vediamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [1, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty, -1/2]$. Ne segue che la funzione è strettamente decrescente su $(-\infty, -1/2]$ e strettamente crescente su $[1, +\infty)$ e non ammette punti di minimo o massimo locali. Gli unici punti di minimo sono quelli di minimo assoluto precedentemente individuati, ovvero $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 1$. Notiamo che

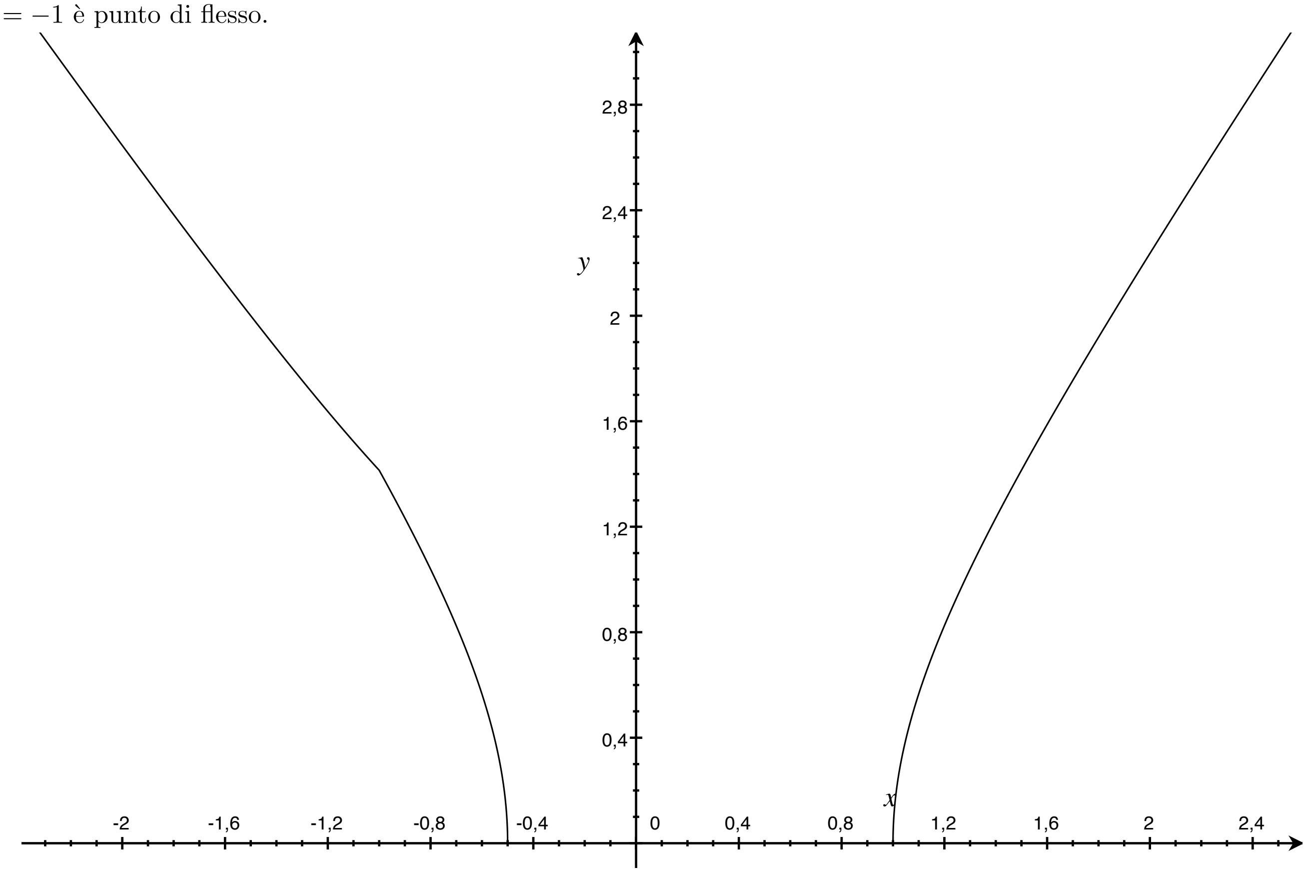
$$f'_+(-1) = -\frac{5}{2\sqrt{2}} \neq \frac{3}{2\sqrt{2}} = f'_-(-1);$$

il punto $x = -1$ risulta un punto angoloso, mentre in tutti gli altri punti del dominio la funzione è derivabile in quanto composizione e somma di funzioni derivabili.

Calcoliamo anche la derivata seconda usando le regole di derivazione ed otteniamo

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{9}{4(2x^2-x-1)^{3/2}} & \text{se } x \geq -1 \\ \frac{7}{4(2x^2+x+1)^{3/2}} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Dato che il denominatore è sempre positivo sul dominio, concludiamo facilmente che $f'' < 0$ su $(-1, \frac{1}{2}]$ e su $[1, +\infty)$, mentre $f'' > 0$ su $(-\infty, -1)$. La funzione risulta convessa su $(-\infty, -1)$ e concava su $(-1, \frac{1}{2}]$ e su $[1, +\infty)$. Il punto $x = -1$ è punto di flesso.



Esercizio 2 Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x - \cos x)}{\sqrt{1 + x^3} - \sqrt{|1 - x|}}\, dx.$$

Soluzione

Poniamo

$$f(x)=\frac{\sin\left(e^x-\cos x\right)}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{|1-x|}}$$

e osserviamo che la funzione non è definita per $x=0$. Verifichiamo se ci sono altri punti da escludere dall'insieme di definizione controllando se il denominatore si annulla in qualche altro punto. Osserviamo che, per $0<x<1$

$$1+x^3>1>1-x=|1-x|$$

e che per $x\geq 1$,

$$1+x^3\geq 1+x>x-1=|1-x|$$

quindi, dato che la funzione radice quadrata è strettamente crescente,

$$\sqrt{1+x^3}>\sqrt{|1-x|},\qquad \forall x\in(0,+\infty)$$

e il denominatore non si annulla mai (è sempre strettamente positivo).
Dividiamo l'intervallo di integrazione in $x=1$ e consideriamo per primo

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Utilizzando gli sviluppi di Taylor di seno, coseno, esponenziale e binomiale e ricordando che $|1-x|=1-x$ per $x\in(0,1]$, otteniamo che, per $x\to 0$

$$f(x)=\frac{\sin\left(1+x+o(x)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\right)}{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sin(x+o(x))}{1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)-(1-\frac{x}{2}+o(x))}=\frac{x+o(x)}{\frac{x}{2}+o(x)}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0}f(x)=2.$$

La funzione f è quindi limitata in un intorno di 0 e il suo integrale sull'intervallo $[0,1]$ converge (basta dare il valore 2 a $f(0)$ per renderla continua e ottenere un integrale di Riemann).
Vediamo l'andamento per $x\to+\infty$. La funzione f è di segno variabile, consideriamo quindi l'eventuale convergenza assoluta. Considerando che il denominatore è sempre positivo, avremo

$$|f(x)|=\frac{|\sin(e^x-\cos x)|}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{x-1}}\leq\frac{1}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{(x^3(x^{-3}+1))^{\frac{1}{2}}-(x(1-x^{-1}))^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}(1+o(1))-x^{\frac{1}{2}}(1+o(1))}$$

$$=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}(1+o(1)-x^{-1}(1+o(1))}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}(1+o(1))}.$$

Scegliendo $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ otteniamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Poiché $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, del confronto e della convergenza assoluta, anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Dal risultato ottenuto sul primo intervallo di integrazione abbiamo quindi che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

Esercizio 3 Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\sqrt[n]{2}-1\right).$$

Soluzione

Consideriamo prima la convergenza assoluta: visto che $\sqrt[n]{2} \geq 1$ per ogni n, se $a_n = (-1)^n \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right)$ abbiamo $|a_n| = \sqrt[n]{2} - 1$. Scrivendo $\sqrt[n]{2} = e^{\frac{1}{n} \log 2}$ e usando lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + o(t)$ con $t = \frac{1}{n} \log 2$, otteniamo che

$$\sqrt[n]{2} - 1 = \frac{1}{n} \log 2 + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Applicando il criterio del confronto asintotico con la successione $b_n = 1/n$, la cui serie associata diverge, concludiamo che la serie data non converge assolutamente.

Per determinare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Lebnitz: la serie data a segno alterno, e come gi osservato abbiamo $\sqrt[n]{2} - 1 \geq 0$. Inoltre la successione $\sqrt[n]{2} - 1 = 2^{1/n} - 1$ decrescente, visto che la successione $1/n$ decrescente, mentre la funzione $f(x) = 2^x$ crescente (e sottrarre 1 non influisce sulla monotonia). Infine, $\lim_{n \to +\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n \to +\infty} 2^{1/n} - 1 = 2^0 - 1 = 0$, dunque la successione $\sqrt[n]{2} - 1$ infinitesima. Si pu applicare quindi il criterio di Lebnitz, e concludere che la serie data converge.